Razões e proporções

Profa. Dra. Denise Ortigosa Stolf

Sumário **Página**

RAZÕES E PROPORÇÕES

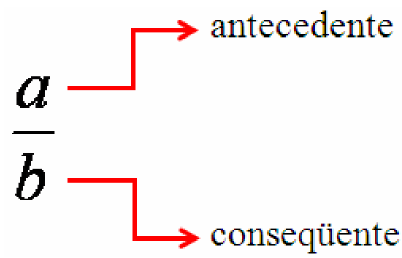
Razão

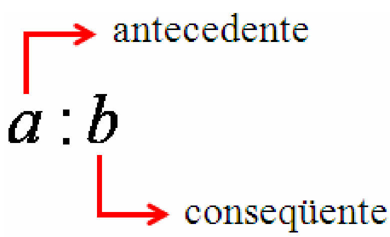
Sendo a e b dois números racionais, com $b \neq 0$, denomina-se ***razão entre a e b*** ou ***razão de a para b*** o quociente do primeiro pelo segundo: $\frac{a}{b}$ ou $a:b$.

A razão $\frac{a}{b}$ ou $a:b$ pode ser lida de uma das seguintes maneiras:

Razão de *a* para *b* ou *a* está para *b* ou *a* para *b*

Quando escrevemos uma razão na forma fracionária ou na forma de divisão, o primeiro número denomina-se ***antecedente*** e o segundo número, ***conseqüente***.





Exemplos:

1) A razão entre 8 e 6 é $\frac{8}{6} = \frac{4}{3}$ ou $8:6$.

2) A razão entre 20 e 15 é $\frac{20}{15} = \frac{4}{3}$ ou $20:15$.

3) Numa partida de basquetebol Rafael fez 15 arremessos, acertando 9 deles. Nessas condições:

a) Qual a razão do número de acertos para o número total de arremessos de Rafael?

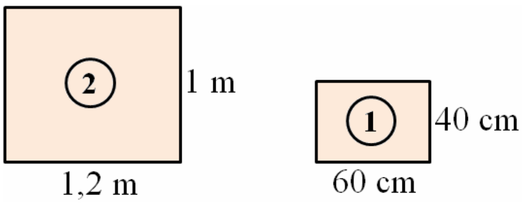
$\frac{9}{15}=\frac{3}{5}$ (3 para 5, ou seja, para cada 5 arremessos dados, Rafael acertou 3)

b) Qual a razão entre o número de arremessos que Rafael acertou e o número de arremessos que ele errou?

15 – 9 = 6

$\frac{9}{6}=\frac{3}{2}$ (3 para 2, ou seja, para cada 3 arremessos acertados, Rafael errou 2)

4) Calcular a razão da área do retângulo 1 para a área do retângulo 2.



Para calcular a razão entre as áreas, devemos antes passá-las para a mesma unidade.

Vamos calcular a área de cada retângulo: $(1\,\text{m}=100\,\text{cm})$

Área do retângulo 1: $A_1=60\cdot 40=2400\,\text{cm}^2$

Área do retângulo 2: $A_1=120\cdot 100=12000\,\text{cm}^2$

Razão: $\frac{A_1}{A_2}=\frac{2400}{12000}=\frac{1}{5}$ (1 para 5, ou seja, a área do retângulo 2 é 5 vezes a área do retângulo 1)

A razão entre duas grandezas de mesma espécie é o quociente dos números que exprimem as suas medidas sempre tomadas na mesma unidade.

EXERCÍCIOS A

(1) Escreva, na forma de fração irredutível, a razão entre os números:

a) 1 e 5

b) 3 e 6

c) 6 e 3

d) 15 e 10

e) 100 e 80

f) 48 e 72

(2) Determine a razão entre as medidas abaixo (não se esqueça de reduzir para a mesma unidade, quando necessário):

a) $5\,\text{cm}$ e $20\,\text{cm}$

b) $10\,\text{cm}$ e $0{,}5\,\text{m}$

c) $12\,l$ e $15\,l$

d) $800\,\text{g}$ e $2\,\text{kg}$

(3) Num teste de 20 questões, Roberta acertou 16. Nessas condições:

a) Qual a razão do número de acertos de Roberta para o número total de questões do teste?

b) Qual a razão do número de erros para o número total de questões do teste?

c) Qual a razão entre o número de acertos e o número total de erros de Roberta?

(4) Um retângulo A tem 10 cm e 15 cm de dimensões e um retângulo B tem 8 cm e 12 cm de dimensão. Qual é a razão entre os perímetros dos dois retângulos?

(5) A razão entre as idades de um filho e seu pai é de $\frac{2}{5}$. Se o filho tem 24 anos, qual é a idade do pai?

Razões inversas

Considere as razões $\frac{4}{5}$ e $\frac{5}{4}$.

Observe que o produto dessas duas razões é igual a 1, ou seja, $\frac{4}{5} \cdot \frac{5}{4} = 1$.

Nesse caso, podemos afirmar que $\frac{4}{5}$ e $\frac{5}{4}$ são ***razões inversas***.

Duas razões são inversas entre si quando o produto delas é igual a 1.

Exemplo:

► Verifique se $\frac{3}{7}$ e $\frac{7}{3}$ são razões inversas.

$$\frac{3}{7} \cdot \frac{7}{3} = 1$$

Portanto, $\frac{3}{7}$ e $\frac{7}{3}$ são razão inversas.

Verifique que nas razões inversas o antecedente de uma é o consequente da outra, e vice-versa.

OBS.:

1) Uma razão de antecedente zero não possui inversa.

2) Para determinar a razão inversa de uma razão dada, devemos permutar (trocar) os seus termos. Por exemplo: o inverso de $\frac{2}{5}$ é $\frac{5}{2}$.

Algumas razões especiais

- **Velocidade média =** $\frac{\text{distância percorrida}}{\text{tempo gasto}}$

- **Escala =** $\frac{\text{comprimento no desenho}}{\text{comprimento real}}$

- **Densidade de um corpo =** $\frac{\text{massa do corpo}}{\text{volume do corpo}}$

- **Densidade demográfica =** $\frac{\text{número de habitantes}}{\text{área}}$

EXERCÍCIOS B

(1) Um automóvel percorreu 400 km em 5 horas. Qual foi a velocidade média desse automóvel no percurso?

(2) Qual é a escala de um desenho em que um comprimento de 3 m está representado por um comprimento de 5 cm?

(3) Uma pedra preciosa tem 67,2 g de massa e ocupa um volume de $16\,cm^3$. Qual a densidade dessa pedra preciosa?

As razões escritas na forma percentual

Além da forma fracionária e da forma decimal, uma razão também pode ser representada na ***forma percentual***, com o símbolo %.

Podemos dizer que:

Toda razão $\frac{a}{b}$, na qual $b = 100$, pode ser escrita na forma de ***porcentagem***.

Assim, temos:

forma percentual ou forma de porcentagem

$$\frac{30}{100} = 0{,}30 = 30\%$$

forma decimal

forma fracionária

Para representar uma razão na forma percentual, temos dois casos a considerar:

1º Caso: O conseqüente *b* é um fator natural de 100.

$$\frac{1}{2} = \frac{1 \cdot 50}{2 \cdot 50} = \frac{50}{100} = 50\%$$

2º Caso: O conseqüente *b* não é um fator natural de 100.

$$\frac{3}{8} = 0{,}375 = \frac{0{,}375 \cdot 100}{100} = \frac{37{,}5}{100} = 37{,}5\%$$

EXERCÍCIOS C

(1) Escreva na forma de porcentagem cada uma das seguintes razões.

a) $\frac{51}{100}$

c) $\frac{11}{20}$

e) 0,03

b) $\frac{12,7}{100}$

d) $\frac{7}{5}$

f) 0,045

(2) As razões a seguir estão escritas na forma percentual. Escreve-as na forma de números fracionários.

a) 55%

c) 10%

b) 8%

d) 120%

Calculando a porcentagem

No exemplo a seguir vamos usar a razão escrita na forma percentual, ou seja, vamos calcular porcentagens.

Exemplo:

► Um desconto de 7000 reais sobre um preço de 20000 reais, representa quantos por cento?

Inicialmente temos a razão $\frac{7000}{20000} = \frac{7}{20}$

Usando equações equivalentes temos:

$$\frac{7 \cdot 5}{20 \cdot 5} = \frac{35}{100} = 35\%$$

Na forma de número decimal, temos:

$$\frac{7}{20} = 0{,}35 = \frac{35}{100} = 35\%$$

EXERCÍCIOS D

(1) Numa prova foram dadas 40 questões. Cristina acertou 34 dessas questões. O número de acertos de Cristina representa quantos por cento do número total de questões?

(2) (PUC-MG) Dos 13000 candidatos inscritos no último vestibular da PUC-MG, verificou-se que 1400 deles tinham menos de 18 anos. Aproximadamente quantos por cento dos candidatos desse vestibular tinham 18 anos ou mais?

Proporção

$\Rightarrow$ A razão entre 6 e 15 é $\frac{6}{15} = \frac{2}{5}$ ou $2:5$.

$\Rightarrow$ A razão entre 10 e 25 é $\frac{10}{25} = \frac{2}{5}$ ou $2:5$.

Nos exemplos acima, verificamos que as razões $\frac{6}{15}$ e $\frac{10}{25}$ são iguais:

$$\left.\begin{array}{l} \frac{6}{15} = \frac{2}{5} \\ \frac{10}{25} = \frac{2}{5} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{6}{15} = \frac{10}{25}$$ (Lê-se: 6 está para 15 assim como 10 está para 25)

Uma sentença matemática que expressa uma igualdade entre duas razões é chamada ***proporção***. Dizemos, então, que as razões $\frac{6}{15}$ e $\frac{10}{25}$ formam uma ***proporção***.

Então:

Proporção é a igualdade entre duas razões.

Quatro números *a*, *b*, *c* e *d*, diferentes de zero, nessa ordem, formam uma proporção quando a razão entre os dois primeiros é igual à razão entre os dois últimos.

$$a:b=c:d \quad \text{ou} \quad \frac{a}{b}=\frac{c}{d}$$

Na proporção $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, temos:

a e d → extremos

b e c → meios

Propriedade fundamental das proporções

De um modo geral, em toda proporção, o produto dos extremos é igual ao produto dos meios e vice-versa.

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \Rightarrow \underbrace{a\cdot d}_{\substack{\text{produto}\\ \text{dos extremos}}} = \underbrace{b\cdot c}_{\substack{\text{produto}\\ \text{dos meios}}}$$

Exemplo:

► Sabendo que os números 6, 24, 5 e *x* formam, nessa ordem, uma proporção, determine o valor de *x*.

$$\frac{6}{24}=\frac{5}{x}$$

$$6x=5\cdot 24$$

$$6x=120$$

$$x=\frac{120}{6}$$

$$x=20$$

Logo, o valor de *x* é 20.

EXERCÍCIOS E

(1) Aplicando a propriedade fundamental, verifique se os seguintes pares de razões formam uma proporção:

a) $\frac{2}{3}$ e $\frac{6}{9}$ **b)** $\frac{13}{16}$ e $\frac{4}{6}$ **c)** $\frac{4}{10}$ e $\frac{6}{4}$

(2) Verifique se os números abaixo formam, na ordem em que aparecem, uma proporção:

a) 4, 6, 20 e 30 **b)** 1, 6, 3 e 12 **c)** 3, 5, 20 e 12

(3) Calcule o valor de x nas seguintes proporções:

a) $\frac{x}{3} = \frac{8}{12}$ **b)** $\frac{2}{x} = \frac{14}{21}$ **c)** $\frac{1}{6} = \frac{5}{x}$

Outras propriedades das proporções

Vamos estudar duas propriedades das proporções que são bastante utilizadas na resolução de problemas.

1ª Propriedade:

Em toda proporção, a soma ou a diferença dos dois primeiros termos está para o primeiro (ou para o segundo), assim com a soma ou a diferença dos dois últimos termos está para o terceiro (ou para o quarto).

- $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a+b}{a} = \frac{c+d}{c}$ ou $\frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}$
- $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a-b}{a} = \frac{c-d}{c}$ ou $\frac{a-b}{b} = \frac{c-d}{d}$

2ª Propriedade:

Em toda proporção, a soma (ou a diferença) dos antecedentes está para a soma (ou a diferença) dos conseqüentes, assim como cada antecedente está para o seu conseqüente.

- $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a+c}{b+d} = \frac{a}{b}$ ou $\frac{a+c}{b+d} = \frac{c}{d}$
- $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a-c}{b-d} = \frac{a}{b}$ ou $\frac{a-c}{b-d} = \frac{c}{d}$

Exemplos:

a) Determinar x e y na proporção $\frac{x}{y} = \frac{3}{4}$, sabendo que $x + y = 28$.

<u>ou</u>

$\frac{x}{y} = \frac{3}{4} \rightarrow$ aplicando a 1ª propriedade

$\frac{x+y}{x} = \frac{3+4}{3} \rightarrow x + y = 28$

$\frac{28}{x} = \frac{7}{3}$

$7x = 3 \cdot 28$

$7x = 84$

$x = \frac{84}{7}$

$x = 12$

Como $x + y = 28$:

$x + y = 28$

$12 + y = 28$

$y = 28 - 12$

$y = 16$

$\frac{x}{y} = \frac{3}{4} \rightarrow$ aplicando a 1ª propriedade

$\frac{x+y}{y} = \frac{3+4}{4} \rightarrow x + y = 28$

$\frac{28}{y} = \frac{7}{4}$

$7y = 4 \cdot 28$

$7y = 112$

$x = \frac{112}{7}$

$x = 16$

Como $x + y = 28$:

$x + y = 28$

$x + 16 = 28$

$x = 28 - 16$

$x = 12$

Portanto, Como $x = 12$ e $y = 16$.

b) Determinar os números a, b e c na proporção $\frac{a}{3}=\frac{b}{5}=\frac{c}{2}$ sabendo que $a+b+c=200$.

$\frac{a}{3}=\frac{b}{5}=\frac{c}{2}$ $\longrightarrow$ aplicando a 2ª propriedade

$\frac{a+b+c}{3+5+2}=\frac{a}{3}$ $\longrightarrow$ $a+b+c=200$

$\frac{200}{10}=\frac{a}{3}$

$10a=3\cdot 200$

$10a=600$

$a=\frac{600}{10}$

$a=60$

Tomando as igualdades duas a duas:

$\frac{a}{3}=\frac{b}{5}$

$\frac{60}{3}=\frac{b}{5}$

$3b=5\cdot 60$

$3b=300$

$b=\frac{300}{3}$

$b=100$

$\frac{a}{3}=\frac{c}{2}$

$\frac{60}{3}=\frac{c}{2}$

$3c=2\cdot 60$

$3c=120$

$c=\frac{120}{3}$

$c=40$

ou:

$a+b+c=200$

$60+100+c=200$

$160+c=200$

$c=200-160$

$c=40$

Logo, $a=60$, $b=100$ e $c=40$.

EXERCÍCIOS F

(1) Aplicando as propriedades, determine os números *x*, *y* e *z* em cada uma das seguintes proporções:

a) $\frac{x}{y} = \frac{1}{2}$, sabendo que $x + y = 90$

b) $\frac{x}{y} = \frac{5}{4}$, sabendo que $x - y = 12$

c) $\frac{x}{6} = \frac{y}{5}$, sabendo que $x - y = 15$

d) $\frac{x}{8} = \frac{y}{5} = \frac{z}{2}$, sabendo que $x + y + z = 90$

(2) A razão entre as massas de alumínio e de oxigênio na substância óxido de alumínio é igual a $\frac{7}{8}$. Calcule as massas de alumínio e de oxigênio necessárias para formar 51 g de óxido de alumínio.

Referências bibliográficas

ANDRINI, Álvaro; VASCONCELLOS, Maria José. **Novo praticando matemática**. São Paulo: Brasil, 2002.

BIGODE, Antonio José Lopes. **Matemática hoje é feita assim**. São Paulo: FTD, 2006.

DANTE, Luiz Roberto. **Tudo é matemática**. São Paulo: Ática, 2005.

EDIÇÕES EDUCATIVAS DA EDITORA MODERNA. **Projeto Araribá: Matemática**. São Paulo: Moderna, 2007.

GIOVANNI, José Ruy; GIOVANNI JUNIOR, José Ruy. **Matemática: pensar e descobrir**. São Paulo: FTD, 2005.

GIOVANNI, José Ruy; CASTRUCCI; Benedito; GIOVANNI JUNIOR, José Ruy. **A conquista da matemática**. São Paulo: FTD, 1998.

GUELLI, Oscar. **Matemática em construção**. São Paulo: Ática, 2004.

GUELLI, Oscar. **Matemática: uma aventura do pensamento**. São Paulo: Ática, 1998.

IMENES, Luiz Márcio; LELLIS, Marcelo Cestari. **Matemática paratodos**. São Paulo: Scipione, 2006.

MIANI, Marcos. **Matemática no plural**. São Paulo: IBEP, 2006.

SOMATEMÁTICA. Disponível em: <http://www.somatematica.com.br>. Acesso em: 5 de outubro de 2008.