POTENCIAÇÃO

É uma multiplicação em série de um número por si mesmo.

Assim: a) $3 \times 3 \times 3 \times 3 = 3^4 = 81$ $\begin{cases} 3 \rightarrow \text{base} \\ 4 \rightarrow \text{expoente} \\ 81 \rightarrow \text{potência} \end{cases}$

b) $a^n = a.a.a. \ldots .a =$ $\begin{cases} a \rightarrow \text{base} \\ n \rightarrow \text{expoente} \\ a^n \rightarrow \text{potência} \end{cases}$

Propriedades das Potências

1ª) **Base 1**: potências de base 1 são iguais a 1

Exemplos:

a) $1^1 = 1$

b) $1^{10} = 1$

Quando a base é um (1) qualquer potência indicada resultará SEMPRE ao valor da base, neste caso o número 1!

2ª) **Expoente 1**: potências de expoente 1 são iguais à base.

Exemplos:

a) $7^{1} = 7$

b) $5^{1} = 5$

c) $x^{1} = x$

3ª) **Potências de bases iguais**

Multiplicação: conservamos a base comum e somamos os expoentes.

Exemplos:

a) $3^{7} \times 3^{5} = 3^{12}$

b) $5^{8} \times 5 \times 2^{9} \times 2^{7} = 5^{9} \times 2^{16}$

c) $2^{41} + 2^{40} = 2^{40 + 1} + 2^{40} = 2^{40} \times 2^{1} + 2^{40} = 2^{40}(2 + 1) = 3 \times 2^{40}$

Divisão: Conservamos a base comum e subtraímos os expoentes.

Exemplos:

a) $2^{8} : 2^{5} = 2^{3}$

b) $6^{12} : 6^{-3} = 6^{12 - (-3)} = 6^{15}$

4ª) **Potências de expoentes iguais**

Multiplicação: multiplicamos as bases e conservamos o expoente comum.

Exemplos:

a) $3^7 \times 2^7 = 6^7$

b) $2^9 \times 3^5 \times 2^7 \times 3^{11} = 2^{16} \times 3^{16} = 6^{16}$

Divisão: dividimos as bases e conservamos o expoente comum.

Exemplos:

a) $8^7 : 2^7 = 4^7$

b) $3^{13} : 5^{13} = \left(\frac{3}{5}\right)^{13}$

5ª) **Potências de potência**:

$(a^b)^c = a^{b.c}$

Exemplos:

a) $(3^7)^2 = 3^{14}$

b) $(8^{13})^2 = 8^{26}$

6ª) **Potência de expoente negativo**

$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ ou $\left(\frac{1}{a}\right)^n$

Exemplos:

a) $2^{-7} = \frac{1}{2^7}$

b) $\left(\frac{3}{5}\right)^{-8} = \left(\frac{5}{3}\right)^{8}$

Obs.: Se $a^b = c \Rightarrow a^{-b} = \frac{1}{c}$

7ª) **Potências de base "0"**

a) $0^n = 0$, se $n > 0$.

b) 0^0 = INDETERMINAÇÃO.

c) 0^n = IMPOSSÍVEL, se $n < 0$.

8ª) Potências de expoentes fracionários:

$$a^{b/c} = \sqrt[c]{a^b}$$

Exemplos:

a) $3^{5/8} = \sqrt[8]{3^5}$

b) $\sqrt{5} = 5^{1/2}$

c) $7^{1/3} = \sqrt[3]{7}$

d) $\sqrt{10^3} = 10^{3/2}$

9ª) Potências de números relativos

1° Caso : o expoente é par: o resultado será sempre positivo
(salvo se a base for nula).

Exemplos:

a) $(-2)^4 = +16$

b) $(+2)^4 = +16$

c) $0^0 = 0$

2º Caso: o expoente é ímpar: o resultado terá o sinal original da base.

Exemplos:

a) $(-2)^3 = -8$

b) $(+2)^3 = +8$

Obs.: $(-3)^2 \neq -3^2$, pois $(-3)^2 = +9$ e $-3^2 = -9$.

RADICIAÇÃO

Definição

Dados um número real “a” (a ≥ 0) e um número natural “n” (n > 0),

existe sempre um número real “b”, tal que:

–

Assim:

$$\sqrt[3]{8} = 2$$

$$\sqrt[4]{16} = 2$$

Ao número “b” chamaremos de “raiz” e indicaremos pelo símbolo: —

$$b = \sqrt[n]{a} \begin{cases} n = \text{índice} \\ a = \text{radicando} \end{cases}$$

Observação:

1) Quando o índice da raiz for “2” não é necessário colocá-lo.

2) Se o índice da raiz for par e o radicando for negativo, não existe solução em R. O número será chamado de irreal ou imaginário.

3) Se o índice for ímpar, existe solução em R.

Igualdade Fundamental

Podemos transformar uma raiz em uma potência ou vice-versa, utilizando a seguinte igualdade:

Exemplos:

a) $\sqrt[3]{x^2} = x^{2/3}$

b) $^{3/4} = \sqrt[4]{x^3}$

Segue-se da igualdade que:

- $b^n = a$ então $\sqrt[n]{a} = b$
- $\sqrt[c]{a^b} = a^{b/c}$
- $\sqrt[n]{a^n} = a$

Propriedades

1ª) $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}$

2ª) $\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}$ n

Exemplos:

1) =

2) =

3) . = =

4) =

3ª) =

4ª) =

Exemplos:

=

= =

= = 4

$$\sqrt[5]{\sqrt{\sqrt[3]{3}}} = \sqrt[30]{3}$$

$$\sqrt{4\sqrt[3]{3}} = \sqrt{\sqrt[3]{4^3 \cdot 3}} = \sqrt[6]{192}$$

Observação:

Para efetuar o produto entre duas ou mais raízes com índices diferentes, deve-se encontrar o m.m.c. entre os índices, dividir o resultado do m.m.c. por cada índice e multiplicar o resultado da divisão pelo expoente de cada radicando.

Exemplo:

$$\sqrt[3]{5} \cdot \sqrt[4]{3} \cdot \sqrt{2^3} \quad \text{m.m.c.}(2,3,4) = 12, \text{ então}: \sqrt[12]{5^4 \cdot 3^3 \cdot 2^{18}}$$

ATENÇÃO!

$$\sqrt[n]{a} \pm \sqrt[n]{b} \neq \sqrt[n]{a \pm b}, \ \text{com } a \neq 0 \text{ e } b \neq 0.$$

Exemplo:

$+ \quad = \quad 2 + 3 = 5$

$+ \quad \neq \quad =$ Muita atenção, porque NÃO é a mesma expressão; são situações DIFERENTES!

Relação dos quadrados perfeitos de 1 a 100

NÚMERO	RAIZ QUADRADA $\sqrt{\ }$	RESULTADO	CÁLCULOS
Número 1	$\sqrt{1}$	**1**	1^2 = 1 X 1 = 1
Número 4	$\sqrt{4}$	**2**	2^2 = 2 X 2 = 4
Número 9	$\sqrt{9}$	**3**	3^2 = 3 X 3 = 9
Número 16	$\sqrt{16}$	**4**	4^2 = 4 X 4 = 16
Número 25	$\sqrt{25}$	**5**	5^2 = 5 X 5 = 25
Número 36	$\sqrt{36}$	**6**	6^2 = 6 X 6 = 36
Número 49	$\sqrt{49}$	**7**	7^2 = 7 X 7 = 49
Número 64	$\sqrt{64}$	**8**	8^2 = 8 X 8 = 64
Número 81	$\sqrt{81}$	**9**	9^2 = 9 X 9 = 81
Número 100	$\sqrt{100}$	**10**	100^2 10 X 10 = 100

Como extrair a raiz quadrada de um número?

A resposta para esta pergunta está nas próximas páginas de nossa apostila. Vamos apresentar, a seguir, o algoritmo para extração de raiz quadrada de um número.

Para extrair a raiz quadrada de um número, seja este número um número natural maior que zero, devemos seguir o método (algoritmo) que nos será apresentado.

As formas práticas para deduzirmos o resultado da raiz quadrada de um número, exigem nossa atenção aos números que são considerados quadrados perfeitos, ou seja: número quadrado perfeito é aquele que é o resultado da multiplicação dele por ele mesmo, como mostrado na tabela acima (quadrados perfeitos de 1 a 100). Quando a raiz quadrada solicitada é de um número quadrado perfeito, é só verificarmos na tabela e imediatamente temos a resposta.

Podemos calcular o resultado da raiz quadrada de um número, por aproximação. Basta que tenhamos o cuidado de raciocinar logicamente, diante da proposta matemática. Veja o exemplo abaixo:

Calcular a raiz quadrada de 35.

Matematicamente, escrevemos a expressão acima como: $\sqrt{35}$

Inicialmente, verificamos na tabela dos quadrados perfeitos, quais os números que se aproximam de 35. Temos o número 5 (pois 5 x 5 = 25) e o número 6 (pois 6 x 6 = 36). Por dedução sabemos que a raiz quadrada de 35 é um número natural que está entre os números 5 e 6! Para calcularmos POR APROXIMAÇÃO o resultado da raiz, vamos definir (por aproximação) um número decimal entre 5 e 6 :

Escolhemos primeiramente o número 5,50, pois 5,50 x 5,50 = 30,25 .

Avaliamos o QUANTO O RESULTADO obtido está próximo do número pretendido (no caso é 35) e definimos o próximo número decimal:

Como o resultado obtido foi abaixo de 35, vamos escolher um número decimal MAIOR que o primeiro escolhido, ou seja: 5,90. Multiplicaremos 5,90 por ele mesmo e comparamos o resultado com o número pretendido da raiz:

5,90 x 5,90 = 34,81

Como podemos perceber, o número agora obtido está MAIS próximo do número que está na raiz. Mas AINDA podemos fazer outras tentativas até que se obtenha o número MAIS APROXIMADO possível do número pretendido.

Desta vez, vamos escolher um número decimal com TRÊS casas decimais para multiplicarmos: 5,916

5,916 x 5,916 = 34, 999056

Desta vez, o resultado está MUITO PRÓXIMO do número que buscamos (35) o que nos leva a afirmar que a RAIZ QUADRADA APROXIMADA do número 35 é 5, 916.

O algoritmo para calcularmos QUALQUER raiz quadrada é apresentado a seguir:

Como exemplo, vamos calcular a raiz quadrada do número 1369.

13 69	Raiz

- Divide-se o número em grupos de dois algarismos, da direita para a esquerda. O primeiro grupo da esquerda poderá ter só um algarismo. O número de grupos é igual ao número de algarismos da raiz.

13 69	3

- Extraímos a raiz quadrada, aproximada ou exata, do primeiro grupo e coloca-se no local destinado à raiz.

13 69	3
-9	6
=4 69	

- Eleva-se a raiz ao quadrado e subtrai-se de 13.
- Coloca-se o segundo grupo à direita do resto e o dobro da raiz logo abaixo da raiz.

13 69	3
-9 =4 69	6y.y = 469

- Agora devemos procurar um valor para y, que será o próximo número da raiz, 68.8 = 544 (não serve), 67.7 = 469 (serve).

13 69	37
-9 =4 69 - 4 69 = 0	67.7 = 469

- Como tivemos resto 0, encontramos a raiz exata de 1369, que é 37.
- Se, ao contrário disso, tivéssemos o resto, deveríamos colocar a vírgula na raiz e descer grupos de dois zeros, continuando com o mesmo procedimento para o cálculo da raiz.

A seguir, vamos realizar uma breve recapitulação do que foi apresentado até agora, na forma de EXERCÍCIOS RESOLVIDOS. Após esta recapitulação, faremos os exercícios sugeridos.

01) (UFRGS) O valor da expressão $\frac{(-5)^2-4^2+\left(\frac{1}{5}\right)^0}{3^{(-2)}+1}$ **é:**

(A) -4
(B) 1/9
(C) 1
(D) 5/4
(E) 9

Nestes exercícios devemos somente substituir os valores dados e achar a resposta.

$$\frac{+25-16+1}{\frac{1}{9}+1}$$

Agora efetuando os cálculos:

$$\frac{+10}{\frac{1+9}{9}}=\frac{10}{\frac{10}{9}}=10\times\frac{9}{10}=9$$

Resposta certa letra "E".

02) (PUC-RS) A expressão $\frac{2^{-2}\times 2^2+2\times(3^2)^2+18^0}{8^{\frac{2}{3}}}$ **é igual a:**

(A) 164
(B) 83
(C) 82
(D) 45
(E) 41

Utilizando as propriedades de potenciação, vamos substituir as potências pelos seus valores:

$$\frac{\frac{1}{2^2}\times 2^2+2\times 3^4+1}{\left(2^3\right)^{\frac{2}{3}}}$$

Agora devemos efetuar as operações. Lembrando que sempre primeiro as multiplicações, depois as somas.

$$\frac{1+2\times 81+1}{2^2}=\frac{1+162+1}{4}=\frac{164}{4}=41$$

Resposta certa, letra "E".

03) (UFSM) O valor da expressão $\sqrt[3]{\dfrac{60000 \times 0{,}00009}{0{,}0002}}$ é:

(A) 3.10^3
(B) 3
(C) 3.10
(D) 9.10^3
(E) 27.10^3

Para facilitar o cálculo, vamos transformar estes números em frações:

$$\sqrt[3]{\dfrac{6 \times 10000 \times \dfrac{9}{100000}}{\dfrac{2}{10000}}}$$

Agora podemos cortar alguma coisa:

$$\sqrt[3]{\dfrac{6 \times 10000 \times \dfrac{9}{100000}}{\dfrac{2}{10000}}} = \sqrt[3]{\dfrac{\dfrac{6 \times 9}{10}}{\dfrac{2}{10000}}} = \sqrt[3]{\dfrac{\dfrac{54}{10}}{\dfrac{2}{10000}}} = \sqrt[3]{\dfrac{54}{10} \times \dfrac{10000}{2}} = \sqrt[3]{27 \times 1000}$$

Fatorando:

$$\sqrt[3]{27 \times 1000} = \sqrt[3]{3^3 \times 10^3} = \sqrt[3]{3^3} \times \sqrt[3]{10^3} = 3 \times 10$$

Resposta certa letra "C".

04) (UFSM) O valor da expressão $\left(\dfrac{3}{2}\right)^{-1} \div \left(\dfrac{2}{3}\right)^{\frac{1}{2}}$ é:

(A) $\dfrac{\sqrt{6}}{3}$
(B) $\left(\dfrac{6}{3}\right)^2$
(C) $\sqrt{2}$
(D) $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$
(E) 2

Aplicando as propriedades, temos:

$$\left(\frac{2}{3}\right) \div \sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{\frac{2}{3}}{\sqrt{\frac{2}{3}}}$$

Racionalizando:

$$\frac{\frac{2}{3}}{\sqrt{\frac{2}{3}}} \times \frac{\sqrt{\frac{2}{3}}}{\sqrt{\frac{2}{3}}} = \frac{\frac{2}{3}\sqrt{\frac{2}{3}}}{\frac{2}{3}} = \sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$$

Racionalizando novamente:

$$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}}{3} = \frac{\sqrt{6}}{3}$$ Resposta certa, letra "A".

05) O valor da expressão $\left(32^{\frac{1}{2}} - 2^{\frac{1}{2}}\right) \cdot 81^{\frac{1}{2}}$

(A) $27\sqrt{2}$
(B) $12\sqrt{2}$
(C) $6\sqrt{2}$
(D) 6
(E) $3\sqrt{2}$

Vamos aplicar as propriedades e fatorar os termos:

$$\left(\sqrt{32} - \sqrt{2}\right)\cdot\sqrt{81} = \left(\sqrt{2^2\cdot 2^2\cdot 2} - \sqrt{2}\right)\cdot 9 = \left(4\sqrt{2} - \sqrt{2}\right)\cdot 9 = \left(3\sqrt{2}\right)\cdot 9 = 27\sqrt{2}$$

Resposta certa, letra "A"

Agora que já vimos como resolver exercícios que envolvem a potenciação e a radiciação, vamos realizar os exercícios das páginas seguintes.

Exercícios:

1. Resolva as potências a seguir:

1. $4^2 \times 4^2 \times 4^2 =$

___

___

2. $2^3 \times 2^4 =$

___

___

3. $2^{-2} \times 2^2 \times 4^2 =$

___

___

4. $4^2 \times 4^{-2} \times 16^2 =$

___

___

5. $5^2 \times 25^2 \times 125 =$

___

___

2. Resolva as raízes dos números a seguir:

1. $\sqrt[3]{27} =$

___

___

2. $\sqrt[4]{256} =$

___

___

3. $\sqrt{64} + \sqrt[3]{27} =$

___

___

4. $\sqrt[3]{27}\ \text{x}\ \sqrt[3]{27}\ \text{x}\ \sqrt[3]{27}\ =$

____

____

5. $\sqrt[4]{256}\ \text{x}\ \sqrt{81}\ \text{x}\ \sqrt[3]{27}\ =$

____

____

6. $\sqrt[3]{27}\ +\ 2^3\ +\ \sqrt{256}\ =$

____

____

7. $\sqrt{64}\ +\ \sqrt[3]{64}\ +\ \sqrt[4]{81}\ +\ \sqrt[5]{32}\ =$

____

____

8. $\sqrt{289}\ +\ 5^3\ +\ \sqrt[4]{625}\ +\ (\sqrt[2]{81})^3\ +2(\sqrt{25})^3\ =$

____

____

9. $2^3\ +\ (\sqrt[3]{729})^2\ \text{x}\ 3(\sqrt{256})^3\ +1 =$

____

____

____

10. $2(\sqrt{256})^2\ +3(\sqrt{81})^4\ +\ 2(\sqrt{25})^3\ +\ (\sqrt{1024})^2\ =$

____

____

____

____

____

____

____

____

Bibliografia:

CASTRO, Alfredo e MULLER, Armando. Matemática Vol.1. Porto Alegre: Editora Movimento, 1981.

DANTE, Luiz Roberto. Tudo é matemática. São Paulo: Ática, 2005.

SCHEIDMANDEL, Nilo Alberto. Organizador. Chapecó, 2008.